

# Programación Lineal

Vladimir Támara Patiño.

2005. Dominio público.

Este escrito se dedica a nuestro Padre Creador, a su santo Espiritu y a Jesús su Hijo y maestro nuestro.

# Capítulo 1

## Programación lineal

- **Logro:** Plantea problemas de programación lineal

### 1.1. Introducción a optimización y programación lineal

Indicadores de logro:

- **Indicador:** Plantea programas lineales
- **Indicador:** Grafica regiones factibles que restringen un programa lineal

#### 1.1.1. Teoría

Un problema de optimización es de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar o maximizar} & f(\vec{x}) \\ \text{sujeito a} & \vec{x} \in \Omega \end{array}$$

Cuando la función por minimizar/maximizar (i.e la función objetivo) es lineal y el conjunto  $\Omega$  se puede expresar con igualdades o desigualdades lineales (con  $\geq$  y  $\leq$ ) se trata de un problema de programación lineal.

Todo problema de programación lineal puede traducirse a un forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la notación  $\vec{u} \geq \vec{v}$  con  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  indica  $u_i \geq v_i$  (para  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Para transformar problemas de programación lineal a la forma estándar pueden emplearse estas técnicas:

- Una desigualdad  $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq M_j$  puede convertirse en igualdad introduciendo una nueva variable de holgura  $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i + y_j = M_j$  con  $y_j \geq 0$ .
- De forma análoga  $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \geq m_j$  puede convertirse en igualdad con una nueva variable excedente  $y_j \geq 0$  para dar  $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - y_j = m_j$ .
- Sustituir una variable no acotada  $x_i$  con dos variables nuevas  $u_i > 0$  y  $v_i > 0$  siendo  $x_i = u_i - v_i$ . Otra posibilidad es emplear alguna igualdad para obtener una expresión para  $x_i$  en función de las demás variables y sustituir tal expresión en las demás ecuaciones con lo que se obtiene un sistema de  $n - 1 \times n - 1$ .
- Dado que  $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j = -\min \sum_{j=1}^n -c_j x_j$ , pueden convertirse problemas de minimización en maximización y viceversa.

También puede llevarse el problema a una forma canónica de minimización/maximización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar/maximizar} \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\vec{x} \geq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Los puntos que cumplen las restricciones se llaman soluciones factibles, están confinados a una región limitada por los hiperplanos que cada una de las restricciones representa.

Algunos problemas que típicamente pueden expresarse como problemas de programación lineal son:

## 1.1. INTRODUCCIÓN A OPTIMIZACIÓN Y PROGRAMACIÓN LINEAL 5

- Problemas de dieta o de mezcla de alimentos
- Problemas de almacenamiento
- Programación de producción (discretizando)
- Problemas de transporte

### 1.1.2. Lecturas recomendadas

Capítulo 1 (Introducción) de [3].

Capítulo 1 de [4].

Pueden consultarse diversas herramientas de fuentes abiertas y comerciales para resolver problemas de programación lineal en [1].

Algunos casos de éxitos en el contexto de empresas que han logrado grandes ahorros por el uso de programación lineal pueden consultarse en la introducción de [5].

### 1.1.3. Ejercicios

1. (Ejercicio 2 de [4]) Un fabricante desea producir una aleación cuya composición, por peso, es 30% de metal A y 70% de metal B. Se dispone de cinco aleaciones a los precios que se indican a continuación:

Aleación	1	2	3	4	5
% A	10	25	50	75	95
% B	90	75	50	25	5
Precio/lb	5\$	4\$	3\$	2\$	1.50\$

La aleación deseada se conseguirá combinando algunas de las otras aleaciones. El fabricante desea hallar las cantidades de las distintas aleaciones necesarias y la combinación más barata. Formúlese este problema como un programa lineal.

2. (Ejercicio 6 de [4]). Una gran compañía textil tiene dos plantas de producción, dos orígenes de materias primas y tres centros de venta. El costo de transporte entre los orígenes y las plantas y entre las plantas y los mercados es el siguiente:

	Planta A	Planta B
Origen 1	1\$/ton	1.50\$/ton
Origen 2	2\$/ton	1.50\$/ton

	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
Planta A	4\$/ton	2\$/ton	1\$/ton
Planta B	3\$/ton	4\$/ton	2\$/ton

Se dispone de 10 toneladas del origen 1 y de 15 toneladas del origen 2. Los tres centros de ventas necesitan 8 toneladas, 14 toneladas y 3 toneladas. La capacidad de procesamiento de las plantas es ilimitada.

- a Formule el problema de encontrar la forma de envío de los orígenes a las plantas y a los mercados que minimice el costo total de transporte.
  - b Redúzca el problema a un solo problema estándar de transporte con dos orígenes y tres destinos. (Sugerencia. Hálle las trayectorias de costo mínimo de los orígenes a los mercados.)
3. (Ejercicio 1.8 de [4]) Convierta el siguiente problema a un programa lineal en forma estándar:

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimizar} & |x| + |y| + |z| \\
 \text{sujeto a} & x + y \leq 1 \\
 & 2x + z = 3
 \end{array}$$

4. (Parte del ejercicio 1.3 de [3]) Considere el problema de ubicar una nueva máquina en un sistema existente que consiste de 4 máquinas. Estas máquinas se localizan en las siguientes coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ :  $(3, 0)$ ,  $(0, -3)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(1, 4)$ . Suponga que las coordenadas de la nueva máquina son  $(x_1, x_2)$ . Formule como problema de programación lineal, minimizar la suma de las distancias desde la nueva máquina a las cuatro máquinas existentes. Use la “distancia en calles”; por ejemplo, la distancia de  $(x_1, x_2)$  a la primera máquina localizada en  $(3, 0)$  es  $|x_1 - 3| + |x_2|$ .

5. (Tomado de [4]) Grafique la región factible (i.e de soluciones factibles) del siguiente problema de programación lineal y después encuentre la solución.

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar} & x_1 + x_2 \\
 \text{sujeto a} & x_1 + \frac{8}{3}x_2 \leq 4 \\
 & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & 2x_1 \leq 3 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

## 1.2. Método Simplex

Indicadores de logro:

- **Indicador:** Revisa fundamentos teóricos del método Simplex
- **Indicador:** Resuelve algunos problemas de programación lineal usando el método simplex

### 1.2.1. Teoría

#### Posibilidades con respecto a la región factible y la solución

En algunos casos puede considerarse una representación gráfica del problema de programación lineal. Por ejemplo con el problema:

$$\begin{array}{ll}
 \text{min} & -x_1 - 3x_2 \\
 \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

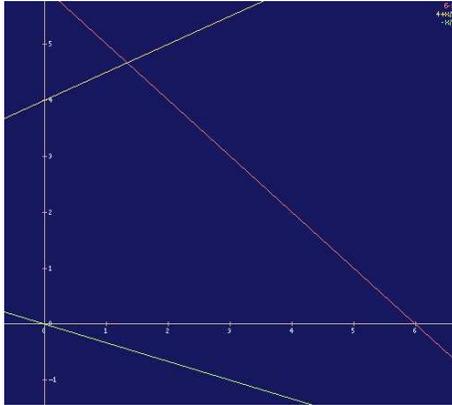


Figura 1.1: Región de soluciones factibles

La región de soluciones factibles está limitada por las rectas:

$$\begin{aligned}x_2 &= 6 - x_1 \\x_2 &= 4 + \frac{x_1}{2} \\x_1 &= 0 \\x_2 &= 0\end{aligned}$$

que se presentan en la figura 1.1.

En la misma gráfica se muestra una de las curvas de la función objetivo, la que corresponde a  $-x_1 - 3x_2 = z$  con  $z = 0$ . Note que a medida que la función objetivo toma menores valores la recta correspondiente se desplaza hacia el noroeste. Así que el valor mínimo (es decir el que alcanza la función objetivo para cierto valor de  $z$  mínimo pero cuya curva tiene al menos un punto en común con la región factible) se alcanzará en el punto de intersección de las rectas  $x_2 = 6 - x_1$  y  $x_2 = 4 + \frac{x_1}{2}$ , que es  $(\frac{4}{3}, \frac{14}{3})$ .

En este caso hay una *solución única* y se trata de un punto extremo de la región factible.

Si en el problema de programación lineal anterior se elimina la restricción  $x_1 + x_2 \leq 6$ , la región factible es no acotada, y en este caso particular todo valor negativo de  $z$  en  $z = -x_1 - 3x_2$  dará lugar a una recta que se interseca con la región factible, de manera que la *solución óptima no está acotada*. Sin embargo, es posible que una región factible sea no acotada y exista un óptimo finito, por ejemplo si en el problema descrito en este párrafo se cambia

la función objetivo por máx  $-x_1 - 3x_2$  (cuya solución es  $(0, 0)$  que también es punto extremo de la región factible).

Al considerar el problema

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Notamos que la pendiente de la función objetivo para todo valor de  $z$  en  $z = -x_1 - x_2$  es -1 al igual que la pendiente de  $x_1 + x_2 = 6$ , por esto resultará toda una *familia de soluciones óptimas*, i.e las que cumplen  $-6 = -x_1 - x_2$ , y en particular los puntos extremos  $(6, 0)$ ,  $(\frac{4}{3}, \frac{14}{3})$ .

Otra posibilidad que puede tenerse es una *región factible vacía*, por ejemplo agregando al problema anterior la restricción  $x_2 \geq 8$ .

### Observaciones generalizables

De los ejemplos anteriores puede generalizarse: Cuando hay solución óptima está en un punto extremo.

Note que al convertir el problema en forma estándar se introducen nuevas variables y que las rectas que limitan la región factible se obtienen igualando las diversas variables a cero. Retomando el ejemplo inicial de esta guía:

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - 3x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + s_1 = 6 \\ & -x_1 + 2x_2 + s_2 = 8 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0 \end{array}$$

Al tomar  $s_1 = 0$  se tiene la recta  $x_1 + x_2 = 6$ , la recta  $-x_1 + 2x_2 = 8$  se logra tomando  $s_2 = 0$  y justamente el punto óptimo corresponde a la solución del sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas que resulta cuando  $s_1 = 0$  y  $s_2 = 0$ . Esta característica también es generalizable tras introducir el concepto de solución básica.

**Definición 1.2.1.** Dadas  $m$  ecuaciones lineales en  $n$  incógnitas, de la forma  $A\vec{x} = \vec{b}$  y  $B$  submatriz de  $m \times m$  no singular con columnas de  $A$ . Si todas las  $n - m$  columnas de  $\vec{x}$  no asociadas a columnas de  $B$  son iguales a 0, llamamos variables básicas a las variables asociadas a  $B$  (i.e  $\vec{x}_B$ ) y a una solución al sistema que también cumpla  $B\vec{x}_b = \vec{b}$  se le llama solución básica respecto a la base  $B$ .

De aquí en adelante supondremos que  $A$  es de rango completo, es decir que las  $m$  filas de la matriz  $A$  son linealmente independientes.

**Definición 1.2.2.** Si una o más variables de una solución básica son 0, se trata de una solución básica degenerada.

**Definición 1.2.3.** Dado el sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq \vec{0} \end{aligned}$$

si  $\vec{x}$  lo satisface decimos que  $\vec{x}$  es solución factible, si además es básica decimos que es solución factible básica. Con respecto al problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{sujeto a} \quad & \mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned}$$

si  $\vec{x}$  lo resuelve decimos que es solución factible óptima, si además  $\vec{x}$  es solución básica decimos que es solución factible óptima básica.

**Teorema 1.2.1.** (Teo. Fundamental de la programación lineal)

1. Si hay una solución factible, hay una solución factible básica.
2. Si hay una solución factible óptima, hay una solución factible óptima básica.

## Método Simplex

Como la solución óptima (de existir) debe ser una solución básica, basta considerar las soluciones básicas (que son  $\binom{n}{m}$ ). El método simplex hace justamente esto, pero evitando soluciones no factibles y procurando mejorar la función objetivo con la elección de las variables básicas.

Lo introducimos con un ejemplo tomado de [6]:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && 5x_1 + 4x_2 \\ &\text{sujeto a} && 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ &&& x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &&& -x_1 + x_2 \leq 1 \\ &&& -x_2 \leq 2 \\ &&& \vec{x} \geq \vec{0} \end{aligned}$$

Una vez expresado el problema en forma estándar podemos formar una tabla como  $\left| \begin{array}{c|c} A & \vec{b} \\ \hline \vec{r}^T & -z \end{array} \right|$  donde  $\vec{r}$  es un vector que ayuda a escoger la próxima variable básica para tratar de disminuir más la función objetivo y  $z$  es el valor de la función objetivo.

El ejemplo en forma estándar es:

$$\begin{aligned} &\text{min} && -5x_1 - 4x_2 \\ &\text{sujeto a} && 6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ &&& x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\ &&& -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ &&& -x_2 + s_4 = 2 \\ &&& (\vec{x}, \vec{s}) \geq \vec{0} \end{aligned}$$

y la tabla inicial asociada :

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -5 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La submatriz de  $A$  que resulta ser la matriz identidad de  $m \times m$  determina cuales son las variables básicas. En este ejemplo son  $(s_1, s_2, s_3, s_4)$ . Como las variables no básicas son  $x_1$  y  $x_2$  su valor es cero y por esto el valor de la función objetivo inicialmente es  $z = 0$ .

Note que en este caso el vector  $r$  comenzó como los coeficientes de la función objetivo en cada una de las variables<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>La convención que empleamos para este vector  $\vec{r}$  es la introducida en [4]. En [3] y [6]

El método simplex provee un mecanismo para determinar que variable vale la pena agregar como básica y cual de las básicas sacar. La variable que pasa a ser básica es la variable no básica que tenga en la columna que le corresponde el menor  $r_j$  negativo. Suponiendo que se hará básica la  $j$ -ésima variable, la variable que deja de ser básica se determina escogiendo la que asociada a

$$\min_i \{x_i/a_{ij} | a_{ij} > 0\}$$

siendo  $x_i$  el valor de la última columna en la fila  $i$ , y  $a_{ij}$  el valor que está en la columna  $j$  (la de la variable que entrará) y fila  $i$ .

Para el ejemplo presentado se ingresará  $x_1$  a la base de básicas (pues aporta un peso de -5 para disminuir la función objetivo), y se sacará  $s_1$  porque  $\frac{24}{6}$  es el valor mínimo de entre  $\frac{24}{6}$  y  $\frac{6}{2}$ .

Para que la matriz identidad ahora incluya la primera columna y tenga el uno en esa columna en la primera fila, aplicamos un paso de la reducción de Gauss-Jordan usando como pivote el 6 que está en la primera columna y primera fila, para obtener:

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 20 \end{array} \right)$$

la cual indica que al escoger como básicas las variables  $(x_1, s_2, s_3, s_4)$  se obtiene la solución  $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (4, 0, 0, 2, 5, 2)$  que logra un valor de la función objetivo de  $-20$ .

Tras analizar la nueva tabla puede concluirse que el nuevo pivote debe ser la celda de la segunda columna y segunda fila (donde está el valor  $\frac{4}{3}$ ), que corresponde a incluir entre las básicas a  $x_2$  y sacar de las que hay a  $s_2$ . Tras reducir se obtiene:

---

en problemas de minimización se usa el inverso multiplicativo de cada coeficiente de la función objetivo, el valor  $z$  da el valor de la función objetivo y la regla para elegir próxima variable (columna) que será básica es la que tenga el coeficiente en  $r$  con el máximo valor positivo.

$$\left( \begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{5}{4} & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 21 \end{array} \right)$$

que da la respuesta óptima (pues ya no hay coeficientes negativos en la fila  $\vec{r}$ ) que es:  $(x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4) = (3, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$  que hace que la función objetivo alcance el valor  $-21$ .

Un resumen, presentado en [6] de los pasos por emplear cuando no hay soluciones básicas degeneradas es:

1. Determinar una solución básica factible de inicio
2. Seleccionar una *variable de entrada* aplicando la condición de optimalidad. Detenerse si no hay variable de entrada; la última solución es la óptima.
3. Seleccionar una variable de salida aplicando la condición de factibilidad.
4. Determinar la nueva solución básica con los cálculos adecuados de Gauss Jordan. Ir al paso 2.

Teniendo en cuenta:

- Condición de optimalidad: La variable de entrada es la que tenga el menor coeficiente negativo en la columna  $\vec{r}$ . Los empates se rompen de forma arbitraria. Se llega al óptimo cuando todos los coeficientes de variables no básicas son no negativos.
- Condición de factibilidad. La variable de salida es la asociada a la mínima razón no negativa. Los empates se rompen de forma arbitraria.

### 1.2.2. Lecturas recomendadas

Capítulo 1 (Introducción) de [3].

El teorema fundamental de programación lineal se presenta y demuestra en [4].

### 1.2.3. Ejercicios

1. Con respecto al planteamiento geométrico/gráfico de un problema de programación lineal, determine la dirección en la que deben moverse las curvas de la función objetivo para maximizarla o minimizarla (Ayuda: use el gradiente).
2. Para el primer ejemplo introducido en esta guía, presente todas las submatrices de  $m \times m$  de  $A$  y determine la solución básica asociada a cada una de ellas, indicando cuales son factibles.
3. Emplee el método simplex para solucionar el ejercicio de la aleación planteado en la guía 1.
4. (Ejercicio 3.3.2.11 de [6]) Gutchi Company fabrica bolsos de mano, bolsos para rasuradoras y mochilas. En las tres fabricaciones se usa piel y material sintético, pero la piel parece ser la materia prima limitante principal. En el proceso de producción intervienen dos clases de mano de obra especializada: costura y acabado. La tabla siguiente muestra la disponibilidad de los recursos, sus consumos por los tres productos y las utilidades por unidad.

Recurso	Bolso de mano	Bolso para rasuradora	Mochila	Disponibilidad diaria
Piel (pie <sup>2</sup> )	2	1	3	42 pies <sup>2</sup>
Costura (hr)	2	1	2	40 hr
Acabado (hr)	1	0.5	1	45 hr
Precio venta (\$)	24	22	45	

Formule el problema como programa lineal y resuélvalo.

5. Consulte el artículo “Linear Programming The Story about How It Began” de Dantzig, disponible en <http://cursos.itam.mx/licenciatura/jmorales/publicaciones/linear-programming-the-story-about-how-it-began/> y escriba un resumen corto. (Aclaración: Vladimir Támara no está de acuerdo con investigar o apoyar sistemas de defensa que no respeten la vida).
6. Demuestre que el conjunto de direcciones de la región factible de un problema de programación lineal es convexo.

## 1.3. Método Simplex

Indicadores de logro:

- **Indicador:** Hace un paralelo entre solución geométrica y algebraica a un problema de programación lineal
- **Indicador:** Explica las reglas del método simplex y puede emplear el método de las dos fases

### 1.3.1. Teoría

#### Interpretación geométrica

**Definición 1.3.1.** Un punto  $\vec{x}$  de un conjunto convexo  $C$  se denomina punto extremo de  $C$  si no hay 2 puntos distintos  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$  en  $C$  tales que  $\vec{x} = \alpha\vec{x}_1 + (1 - \alpha)\vec{x}_2$  para algún  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Definición 1.3.2.** Un conjunto  $C$  en  $E^n$  es convexo si para todo par  $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in C$  y todo número real  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  el punto  $\alpha\vec{x}_1 + (1 - \alpha)\vec{x}_2$  también está en  $C$ .

Por ejemplo el conjunto de soluciones factibles de un problema de programación lineal es convexo.

**Teorema 1.3.1.** (Equivalencia entre puntos extremos y soluciones básicas)  
Sea  $A$  matriz de  $m \times n$  de rango  $m$ , y  $\vec{b}$  un  $m$ -vector. Sea  $K$  politopo convexo formado por los  $n$ -vectores que satisfacen:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Un vector  $\vec{x}$  es punto extremo de  $K$  si y sólo si,  $x$  es solución factible básica de  $A\vec{x} = b$ ,  $\vec{x} \geq 0$ .

**Definición 1.3.3.** Un conjunto  $C \subseteq R^m$  es acotado si existe  $k \in R$  tal que para todo  $\vec{x} \in C$ , se da  $\|\vec{x}\| \leq k$ .

**Definición 1.3.4.** Un rayo es un conjunto  $\{\vec{x} + \lambda\vec{d} : \lambda \geq 0\}$  con  $\vec{d}$  distinto de 0. Decimos que  $\vec{x}$  es vértice del rayo y  $\vec{d}$  es su dirección.

**Definición 1.3.5.** Un vector  $\vec{d}$  es dirección de un conjunto convexo  $C$ , si para cualquier punto  $\vec{x} \in C$  el rayo con vértice en  $\vec{x}$  y dirección  $\vec{d}$  está enteramente contenido en  $C$ , i.e.  $\{\vec{x} + \lambda\vec{d} : \lambda \geq 0\} \subseteq C$

Ejemplo: Un conjunto acotado no tiene direcciones.

Ejemplo: Sea  $C = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0\}$ . Un vector  $\vec{d}$  distinto de 0 es dirección si y solo si  $A\vec{d} = 0$  y  $\vec{d} \geq 0$ .

Ejemplo: En el caso  $C = \{\vec{x} : A\vec{x} \geq \vec{b}, \vec{x} \geq 0\}$ . Un vector  $\vec{d}$  es dirección si y solo si  $A\vec{d} \geq 0$  y  $\vec{d} \geq 0$  y  $\vec{d} \neq 0$ .

**Definición 1.3.6.** Una dirección extrema de un conjunto convexo  $C$  es una dirección del conjunto que no se puede representar como combinación lineal positiva de dos direcciones distintas del conjunto.

**Definición 1.3.7.**  $\vec{d}_1$  es no equivalente a  $\vec{d}_2$  si no es múltiplo positivo.

**Teorema 1.3.2.** Si la región factible es no vacía, existe una solución óptima finita si y solo si,  $\vec{c}^T \vec{d}_j \geq 0$  para cada  $j = 1 \dots l$  en donde  $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_l$  son las direcciones extremas de la región factible. En caso contrario, la solución óptima es no acotada.

**Teorema 1.3.3.** (Teorema de representación)

Sea  $C = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0\}$  conjunto no vacío con puntos extremos  $E = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\}$  y direcciones extremas  $D = \{\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_l\}$ :

1.  $D$  es vacío si y sólo si  $C$  es acotado
2.  $\vec{x} \in C$  si y sólo si  $\vec{x}$  puede representarse como combinación convexa de los puntos extremos más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas, i.e. existen  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  y  $\mu_1, \dots, \mu_l \geq 0$  tales que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$  y

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{x}_i + \sum_{i=1}^l \mu_i \vec{d}_i$$

## Inicio del método Simplex

Para iniciar el método simplex es indispensable que la tabla presentada en la guía anterior incluya una matriz identidad. Para lograrlo podría intentarse dividir la matriz  $A$  en básicas y no básica (digamos que las básicas son las

primeras):  $A = [B, D]$  lo que conlleva a una división natural en las variables  $\vec{x} = (x_B, x_D)$  y los coeficientes de la función objetivo  $c^T = (c_B^T, c_D^T)$  y a un reformulación del problema en forma estándar:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_B^T x_B + c_D^T x_D \\ \text{sujeto a} \quad & Bx_B + Dx_D = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{aligned}$$

La tabla simplex sería:

$$\begin{array}{c|c|c} A & \vec{b} & \\ \hline c^T & 0 & \\ \hline 0 & & \\ \hline B & D & \vec{b} \\ \hline c_B^T & c_D^T & 0 \end{array}$$

que podría incluir la matriz identidad y quedar lista para iniciar el método simplex si premultiplicamos las primeras filas por  $B^{-1}$ :

$$\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}D & B^{-1}\vec{b} \\ \hline c_B^T & c_D^T & 0 \end{array}$$

y después a la última fila le restamos  $c_B^T$  veces las anteriores:

$$\begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}D & B^{-1}\vec{b} \\ \hline 0 & c_D^T - c_B^T B^{-1}D & -B^{-1}\vec{b} \end{array}$$

Este procedimiento asegura que comenzaremos con una solución básica, pero no asegura que sea factible pues algunos de los coeficientes  $B^{-1}\vec{b}$  podrían ser negativos.

Una manera que asegura encontrar una solución básica factible para iniciar el procedimiento simplex se conoce como el método de las dos fases. La idea es encontrar primero una solución al sistema

### Método de las dos fases

Para encontrar una solución básica factible a  $A\vec{x} = b$  con  $x \geq 0$  pueden introducirse suficientes *variables artificiales*<sup>2</sup> y plantear el siguiente problema de programación lineal:

---

<sup>2</sup>Deben introducirse tantas variables artificiales como columnas falten para completar una submatriz identidad en la tabla simplex. En el caso extremo (que es el supuesto en esta guía) se requieren  $m$  variables artificiales.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^k y_i \\ \text{sujeto a} \quad & [A, I] \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{pmatrix} = \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0, \vec{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Resolver este problema corresponde a la primera fase del problema original. Si la solución de este problema incluye  $\vec{y} = 0$  tendremos una solución básica factible con la cual iniciar el procedimiento simplex del problema original (i.e con la cual iniciar la segunda fase). Si en la solución resulta  $\vec{y} \neq 0$  sabemos que el problema original no tiene siquiera una solución básica factible y menos una óptima.

### Revisando método simplex

Para escoger la *variable que ingresa al conjunto de básicas*, puede considerarse la forma como mejoraría la función objetivo. Para esto vale la pena expresar la función objetivo sólo en términos de variables no básicas. Como  $B\vec{x}_B + D\vec{x}_D = \vec{b}$  premultiplicando por  $B^{-1}$  tenemos una expresión para  $x_B$  en función de  $x_D$   $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{b} - B^{-1}D\vec{x}_D$ . Esta última puede remplazarse en la función objetivo  $\vec{c}_B^T\vec{x}_B + \vec{c}_D^T\vec{x}_D$  que da  $\vec{c}_B^TB^{-1}\vec{b} + (\vec{c}_D^T - \vec{c}_B^TB^{-1}D)\vec{x}_D$ .

Que puede reescribirse como

$$\vec{c}^T\vec{x} = z_0 + \sum_{j \in D} (c_j - z_j)x_j$$

con  $z_j = \vec{c}_B^T(B^{-1}D)_j$ .

Como cada  $x_i$  es no negativa y buscamos una  $x_j$  para que no sea 0, la expresión anterior puede disminuir sólo si se hace básica una  $x_j$  ( $j \in D$ ) tal que  $(c_j - z_j) < 0$ .

Por esto buscamos entre los coeficientes  $(c_j - z_j)$  el que sea más negativo, buscando disminuir  $\vec{c}^T\vec{x}$  al máximo. Si para todo  $j \in D$  resulta que  $c_j - z_j \geq 0$  no hay forma de disminuir la función objetivo cambiando las variables básicas, así que tenemos un óptimo.

Note que en la tabla simplex los coeficientes  $(c_j - z_j)$  están justamente

en la última fila: 
$$\left| \begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}D & B^{-1}\vec{b} \\ \hline 0 & \vec{c}_D^T - \vec{c}_B^TB^{-1}D & -B^{-1}\vec{b} \end{array} \right|$$

Para elegir la *variable que deja de ser básica*, una vez elejida  $x_j$  como la que ingresara, debemos asegurar que se logra una solución básica factible.

Como  $B$  es base podemos expresar  $\vec{d}_j$  como combinación lineal de las columnas de  $B$ :  $\vec{d}_j = \sum_{i \in B} \vec{b}_i y_{ij}$

$$\begin{aligned} B\vec{x}_b &= \vec{b} \\ \sum_{i \in B} \vec{b}_i x_i &= \vec{b} \\ \sum_{i \in B} \vec{b}_i x_i - \epsilon \vec{d}_j + \text{epsilon} \vec{d}_j &= \vec{b} \\ \sum_{i \in B} \vec{b}_i x_i - \epsilon \sum_{i \in B} \vec{b}_i y_{ij} + \text{epsilon} \vec{d}_j &= \vec{b} \\ \sum_{i \in B} \vec{b}_i (x_i - \epsilon y_{ij}) + \text{epsilon} \vec{d}_j &= \vec{b} \end{aligned}$$

Como queremos que en los términos de la sumatoria ninguno de los coeficientes  $x_i - \epsilon y_{ij}$  se haga negativo podemos escoger  $\epsilon$  que cumpla para todo  $i$ :  $x_i - \epsilon y_{ij} \geq 0$  es decir  $\epsilon \leq \frac{x_i}{y_{ij}}$ .

Como además queremos que al menos uno de esos términos sea 0, escogemos:

$$\epsilon = \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{ij}} : y_{ij} > 0 \right\}$$

y de la base de básicos sacamos la variable  $x_p$  cuyo índice  $p$  logra tal minimización. Si tal mínimo se alcanza para varias variables, se trata de una solución degenerada y podemos escoger cualquier de ellas. Si no hay  $y_{ij}$  positivos se trata de un óptimo no acotado.

Note que para expresar el vector  $\vec{d}_j$  como combinación lineal de la base:  $\vec{d}_j = \vec{b}_1 y_{1j} + \dots + \vec{b}_m y_{mj}$  i.e  $B\vec{y} = \vec{d}_j$  o premultiplicando por  $B^{-1}$   $\vec{y} = B^{-1}\vec{d}_j$  Así que los coeficientes se encuentran en la  $j$ -ésima columna de la matriz

$B^{-1}D$  la cual aparece en la tabla simplex:  $\left| \begin{array}{c|c|c} I & B^{-1}D & B^{-1}\vec{b} \\ \hline 0 & \vec{c}_D - \vec{c}_B^T B^{-1}D & -B^{-1}\vec{b} \end{array} \right|$

y así hemos deducido las dos reglas del método simplex antes introducidas para cambiar las variables básicas.

### 1.3.2. Lecturas recomendadas

La interpretación geométrica es adaptada del Capítulo 2 de [3] y del capítulo 2 de [4].

El método de las dos fases y la deducción de las reglas del método simplex son adaptados del capítulo 3 de [4].

### 1.3.3. Ejercicios

1. (Adaptado de ejercicio 3.3.1 de [3]) Dado un problema de programación lineal de la forma:

$$\begin{array}{ll} \min & \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{sujeto a} & A\vec{x} \leq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{array}$$

con  $b \geq 0$ . Sea  $\vec{x}_0$  tal que  $A\vec{x}_0 < \vec{b}$  y  $\vec{x}_0 > 0$ , demostrar que  $\vec{x}_0$  no puede ser solución óptima.

2. (Adaptado de ejercicio 2.3 de [4]) Una refinera de petróleo tiene dos fuentes de petróleo bruto: crudo ligero, que cuesta 35 euros por barril, y crudo pesado, 30 euros por barril. A partir del crudo, la refinera produce gasolina y combustibles para calefacción y para turbinas en las cantidades por barril indicadas en la tabla siguiente:

	Gasolina	Combustible para calefacción	Combustible para turbinas
Crudo ligero	0.3	0.2	0.3
Crudo pesado	0.3	0.4	0.2

La refinera ha contratado una provisión de 900000 barriles de gasolina, 800000 barriles de combustible para calefacción y 500000 barriles de combustible para turbinas. La refinera desea calcular las cantidades de crudo ligero y pesado que tiene que comprar para poder cubrir sus necesidades al costo mínimo. Formúlese este problema como un problema de programación lineal.

## 1.4. Ciclado y Dualidad

Indicadores de logro:

- **Indicador:** Conoce un método para evitar ciclado con Simplex
- **Indicador:** Puede formular el dual de un problema de programación lineal

### 1.4.1. Teoría

Prevención de ciclado

Dualidad

### 1.4.2. Lecturas recomendadas

El método de prevención de ciclado puede consultarse en [3]

### 1.4.3. Ejercicios

1. (Ejercicio 1.1.7 de [3]) Un fabricante de acero produce 4 tamaños de vigas en I: pequeño, mediano, grande y extra grande. Estas vigas se pueden producir en cualquiera de tres tipos de máquinas: A, B y C. A continuación se indican las longitudes (en pies) de las vigas I que pueden producir las máquinas por hora.

Viga	A	B	C
Pequeña	300	600	800
Mediana	250	400	700
Larga	200	350	600
Extra larga	100	200	300

Supóngase que cada máquina se puede usar hasta 50 horas por semana y que los costos de operación por hora de estas máquinas son \$30, \$50 y \$80 respectivamente. Supóngase, además, que semanalmente se requieren 10,000, 8,000, 6,000 y 6,000 pies de los distintos tamaños de las vigas I. Formular el problema de programación de máquinas como un programa lineal.

2. (Ejercicio 2.5 de [3]) Supongase que  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  forman base  $E^n$  y  $\vec{y} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$  con  $\lambda_j = 0$ . Demuestre que  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}$ , y  $\vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n$  no forman una base de  $E^n$ .
3. (Ejercicio 2.7 de [3]) Sea

$$A = \left[ \begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline T & I \end{array} \right]$$

en donde  $B$  es una matriz  $m \times m$  invertible,  $I$  es una matriz identidad de  $k \times k$ ,  $0$  es una matriz cero de  $m \times k$ , y  $T$  es una matriz arbitraria  $k \times m$ . Demostrar que  $A$  es invertible y que

$$A^{-1} = \left[ \begin{array}{c|c} B^{-1} & \vec{0} \\ \hline -TB^{-1} & I \end{array} \right]$$

4. (Ejercicio 2.11 de [3]) Demostrar que si  $A$  y  $B$  son matrices  $n \times n$  invertibles, entonces  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
5. (Ejercicio 2.15 de [3]) Sea  $B$  una matriz invertible con elementos no negativos, demostrar que cada renglón de  $B^{-1}$  tienen al menos un elemento positivo.
6. (Ejercicio 2.46 de [3]) Sea  $X = \{\vec{x} : A\vec{x} = \vec{b}, \vec{x} \geq 0\}$  en donde  $A$  es una matriz  $m \times n$  con rango  $m$ , demostrar que  $\vec{d}$  es una dirección extrema de  $X$  si y sólo si,  $\vec{d}$  es un múltiplo positivo del vector  $(-\vec{y}_j^T, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)^T$  en donde el 1 aparece en la posición  $j$  y

$$\begin{aligned} y_j &= B^{-1} \vec{a}_j \geq 0 \\ A &= [B, N] \\ \vec{a}_j &= \text{columna de } N \end{aligned}$$

siendo  $B$  matriz invertible  $m \times m$ . Ilustrar el resultado mediante el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

7. (Ejercicio 2.51 de [3]) Determinar todos los puntos extremos y las direcciones extremas del siguiente conjunto poliédrico:

$$X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, -x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_2 + x_4 = 2\}$$

Representar  $x = (1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  como una combinación convexa de los puntos extremos de  $X$  más una combinación lineal no negativa de las direcciones extremas de  $X$ .

8. (Ejercicio 3.21 de [3]) Una empresa hace tres productos 1, 2 y 3. Cada producto requiere de un tiempo de producción en tres departamentos, como se muestra en la siguiente tabla:

Producto	Departamento 1	Departamento 2	Departamento 3
1	3 hr/unidad	2 hr/unidad	1 hr/unidad
2	4 hr/unidad	1 hr/unidad	3 hr/unidad
3	2 hr/unidad	2 hr/unidad	3 hr/unidad

En cada uno de los tres departamentos se dispone de 600, 400 y 300 horas de producción, respectivamente. Si cada uno de los productos 1, 2 y 3 contribuye con una ganancia de \$2, \$4 y \$2.5 respectivamente, determinar la combinación óptima de productos.

## 1.5. Condiciones de Kuhn Tucker

Indicadores de logro:

- **Indicador:** Aplica condiciones de Kuhn Tucker en problemas de programación lineal

### 1.5.1. Teoría

**Multiplicadores de Lagrange**

**Condiciones de Kuhn Tucker**

**Condiciones de Kuhn Tucker para problemas de programación lineal**

Ejemplo

## Demostración de suficiencia y necesidad de condiciones de Kuhn Tucker para problemas de programación lineal

### 1.5.2. Lecturas recomendadas

Las condiciones de Kuhn Tucker para problemas no lineales pueden ser consultadas en [4].

Su uso en el caso de problemas de programación lineal puede consultarse en [3].

### 1.5.3. Ejercicios

- (Ejercicio adaptado de [2]) Calcule la distancia máxima y mínima del origen a la curva  $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ . Muestre que los puntos donde se alcanzan máximo y mínimo son regulares.
- A partir de la formulación general del teorema de Kuhn Tucker, deducir las condiciones para un problema de programación lineal del estilo:

$$\begin{array}{ll} \max & \vec{c}^T \vec{x} \\ \text{sujeto a} & A\vec{x} \geq \vec{b} \\ & \vec{x} \geq 0 \end{array}$$

- (Ejercicio 5.42 de [3]) Considerese el siguiente problema:

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

resolverlo siguiendo el método simplex, ilustrando en cada iteración la fuente de violación de las condiciones de Kuhn-Tucker.

- (Ejercicio 5.41 de [3]) Considérese el problema: Minimizar  $\vec{c}^T \vec{x}$  sujeta a  $A\vec{x} = \vec{b}$ ,  $\vec{x} \geq 0$ . Ignorando la cuestión de la factibilidad, demostrar que empezando en cualquier punto  $\vec{x}$ , la dirección con norma 1, que es aquella que mejora más la función objetivo, es  $\frac{-\vec{c}}{\|\vec{c}\|}$ .

5. (Ejercicio 5.39 de [3]) un fabricante produce dos artículos con ganancias por unidad de \$10 y \$15. Cada unidad del artículo 1 usa 4 horas-hombre y 3 horas-máquina. Cada unidad del artículo 2 usa 7 horas-hombre y 6 horas-máquina. Si el total disponible de horas-hombre y de horas-máquina es de 300 y 500 respectivamente, encontrar la solución óptima y verificarla usando las condiciones de Kuhn-Tucker. Dar una interpretación económica de las condiciones de Kuhn-Tucker en el punto óptimo.
  
6. (Adaptado del ejercicio 1.5 de [3]) Una compañía desea planificar la producción de dos de sus artículos que tienen demanda de temporada en un período de 12 meses. La demanda mensual conocida del artículo 1 es de 100,000 unidades durante los meses de octubre, noviembre y diciembre y de 10,000 unidades el resto del año. El artículo 2 tiene una demanda de 50,000 unidades durante los meses de febrero a octubre y de 15,000 unidades durante los meses restantes. Suponga que el costo por unidad para producir los artículos 1 y 2 es de \$5 y \$8 respectivamente, siempre y cuando se fabriquen antes de junio. Después de junio, los costos por unidad se reducen a \$4.50 y \$7 debido a la instalación de un mejor sistema de fabricación. El número total de unidades de los artículos 1 y 2 que pueden fabricarse durante cualquier mes particular no puede ser mayor de 120,000. Además, cada unidad del artículo 1 ocupa 2 pies cúbicos de almacén y cada unidad del artículo 2 ocupa 4 pies cúbicos. Supóngase que el espacio máximo de almacén asignado a estos artículos es de 150,000 pies cúbicos y que el costo de arrendamiento por pie cúbico calculado al final de cada mes es de \$0.10. Formule el problema de planeación de producción de tal manera que la producción total y los costos de inventario sean mínimos.



# Bibliografía

- [1] Faq de programación lineal. <http://www-unix.mcs.anl.gov/otc/Guide/faq/linear-programming-faq.html>.
- [2] Tom M. Apostol. *Calculus*. 1988.
- [3] Mokhtar S. Bazaraa and John J. Jarvis. *Programación lineal y flujo en redes*. 1994.
- [4] David E. Luenberger. *Programación lineal y no lineal*. 1989.
- [5] James Orlin. Introducción a la optimización. <http://mit.ocw.universia.net/15.053/s02/index.html>, Primavera 2002.
- [6] Hamdy A. Taha. *Investigación de operaciones*. 2004.